Intégrale de Fresnel

alexbasicc

October 2021

1 Introduction

2 Calcul de l'intégrale de Fresnel

Théorème: L'intégrale de Fresnel défini par $\varphi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ existe et $\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$

1) Montrons que φ existe
2) Déterminons sa valeur

Existence de φ:

Par changement de variable $u = x^2$ on remarque que $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{u}} du$ sont de même nature.
Or $\forall a > 0, |\int_0^{+\infty} e^{iu} du| \leq 4$ et $u \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{u}}$ est décroissante et converge vers 0 en $+\infty$
Par lemme d'Abel : $\int_0^{+\infty} e^{iu}$ converge donc φ existe.

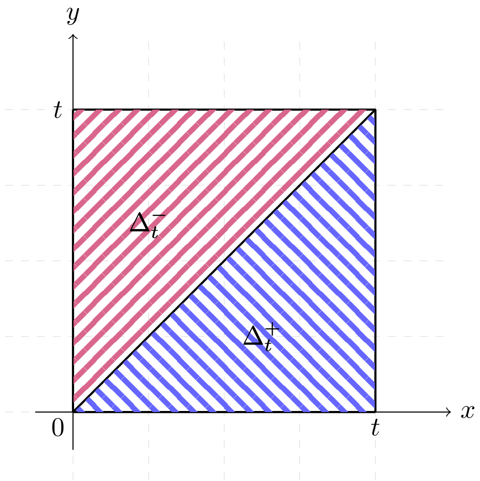
Soit $t \in [0, +\infty[$ et $T \in]0, +\infty[$ on pose :
$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{ix} dx$
$F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{ix^2+y^2} \, dx \, dy$, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = e^{i(x^2+y^2)}$
$I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \, dt$

Exprimons $F(T)$ de deux manières:

$$
\begin{aligned}
F(T) &= \iint_{[0,t]^2} e^{ix^2+y^2} \, dx \, dy \\
&= \int_0^t \int_0^t e^{ix^2+y^2} \, dx \, dy && \text{par Fubini, g est mesurable sur } [0,t]^2 \\
&= f(t)
\end{aligned}
$$

On pose

$$
\begin{aligned}
\Delta_t^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq x\} \\
\Delta_t^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq t, 0 \leq x \leq y\}
\end{aligned}
$$



Alors

$$\begin{aligned}
F(t) &= \iint_{\Delta_t^+} e^{ix^2+y^2}\,dx\,dy + \iint_{\Delta_t^+} e^{ix^2+y^2}\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{\Delta_t^+} e^{ix^2+y^2}\,dx\,dy && \text{(par symetrie de g)}
\end{aligned}$$

Passons en coordonnées polaires :

Soit $K_t = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], 0 \leq r\cos(\theta) \leq t\}$ et :

$$\begin{aligned}
\psi\colon K_{t\setminus\{0\}} &\longrightarrow \Delta^+_{t\setminus\{0\}} \\
r,\theta &\mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))
\end{aligned}$$

ψ est un C_1 difféomorphisme de K_t sur Δ_t^+ par théorème d'inversion global puisque $|Jac(\psi)(r,\theta)| > 0$.

$$\begin{aligned}
F(t) &= 2\iint_{\Delta_t^+} re^{ir^2}\,dr\,d\theta && \text{(changement de variable par } \psi) \\
&= -i\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{t}{\cos(\theta)}} 2ire^{ir^2}\,dr\,d\theta && \text{(Fubini)} \\
&= -i\int_0^{\frac{\pi}{4}} [e^{ir^2}]_0^{\frac{t}{\cos(\theta)}}\,d\theta \\
&= -i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(\frac{it^2}{\cos^2(\theta)}) - 1\,d\theta \\
\text{D'où } F(T) &= \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(\frac{it^2}{\cos^2(\theta)})\,d\theta
\end{aligned}$$

Calculons I(T):

$$\begin{aligned}
I(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt \\
&= \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^T\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(\frac{it^2}{\cos^2(\theta)})\,d\theta\,dt \\
&= \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^T \exp(\frac{it^2}{\cos^2(\theta)})\,dt\,d\theta && \text{(Fubini)} \\
&= \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{T}{\cos(\theta)}} e^{iu^2}\cos(\theta)\,dt\,d\theta && \text{(Changement de variable: u} = \frac{T}{\cos(\theta)}\text{)} \\
\text{On a donc } I(T) &= \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\frac{T}{\cos(\theta)})\cos(\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

De plus f est bornée car φ converge.
Ainsi $\frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\frac{T}{\cos(\theta)})\cos(\theta)\,d\theta \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$
On en déduit $I(T) \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{i\pi}{4}$
Or I(T) est une moyenne de Cesàro donc $I(T) \xrightarrow[T\to\infty]{} \varphi^2 = \lim\limits_{t\to\infty} F(t)$
Par unicité de la limite : $\varphi^2 = \frac{i\pi}{4}$
Déterminons le signe de $\Im(\varphi)$

$$\begin{aligned}
\Im(\varphi) &= \Im(\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx) \\
&= \Im(\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}}\,du) && \text{(Par changement de variable } u = x^2\text{)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du && \text{(Par décomposition de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du) && \text{(Par décomposition de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v+\pi}}\,dv) && \text{(changement de variable } v = u-\pi, \sin(v+\pi) = -\sin(v)\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2} \times (\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}})\,du)
\end{aligned}$$

Or $\forall u > 0, \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall u \in [2k\pi, (2k+1)\pi], sin(u) \geq 0$ donc $\Im(\varphi) \geq 0$

$$\varphi = \frac{\sqrt(\pi)}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

3 Supplément : Moyenne de Cesàro

Soit$F$ fonction de limite fini l en $+\infty$ et $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$

D'après la définition de limite : $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0, \forall t \geq M_\varepsilon, |F(t) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $T > M$,

$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^M F(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_M^T F(t)\,dt$ donc

$$|I(T) - l| \leq \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^{M_\varepsilon} F(t)\,dt}_{\exists M'_\varepsilon, \uparrow < \frac{\varepsilon}{2}, T \geq B} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_{M_\varepsilon}^T F(t)\,dt}_{\uparrow < \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-A}{T} \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

Donc, $\forall \varepsilon, \forall T \geq \max(M_\varepsilon, M'_\varepsilon), |I(T) - \varphi| < \varepsilon$

$$I(T) \xrightarrow[T\to\infty]{} l = \lim_{t\to\infty} F(t)$$